**Лабораторна робота 3. Моделювання Пуассонівського та Вінерівського (гауссового) випадкового процесу.**

*Завдання1.*

1. Змоделювати Пуассонівський потік з заданою інтенсивністю. Побудувати графіки реалізацій процесу.

Побудувати гістограми розподілів:

- часу появи заданої події (перша, друга, *n* - та);

- інтервалу між подіями;

- появи рівно *n* - подій.

**Методичні рекомендації до виконання.**

**Означення 1.** [Випадковий процес](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%B8%D0%BF%D0%B0%D0%B4%D0%BA%D0%BE%D0%B2%D0%B8%D0%B9_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D1%86%D0%B5%D1%81) ( N t ) t ∈ R + {\displaystyle (N\_{t})\_{t\in {\mathbb {R} }^{+}}}  з неперервним і невід'ємним часом та значеннями на множині невід'ємних [цілих чисел](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A6%D1%96%D0%BB%D1%96_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B0) називається (однорідним) Пуассонівським процесом, якщо:

1. N 0 = 0 {\displaystyle N\_{0}=0} майже напевно (з ймовірністю 1).
2. ∀ t 0 = 0 < t 1 < ⋯ < t k , {\displaystyle \forall t\_{0}=0<t\_{1}<\dots <t\_{k},}  випадкові величини ( N t k − N t k − 1 ) , … ( N t 1 − N t 0 ) {\displaystyle (N\_{t\_{k}}-N\_{t\_{k-1}}),\dots (N\_{t\_{1}}-N\_{t\_{0}})} є [незалежними](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B5%D0%B7%D0%B0%D0%BB%D0%B5%D0%B6%D0%BD%D1%96%D1%81%D1%82%D1%8C_(%D1%96%D0%BC%D0%BE%D0%B2%D1%96%D1%80%D0%BD%D1%96%D1%81%D1%82%D1%8C)). Тобто, Пуассонівський процес є процесом з незалежними приростами.
3. ∀ t , h > 0 {\displaystyle \forall t,h>0}  приріст процесу N t + h − N t {\displaystyle N\_{t+h}-N\_{t}}  задовольняє [розподілу Пуассона](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%BE%D0%B7%D0%BF%D0%BE%D0%B4%D1%96%D0%BB_%D0%9F%D1%83%D0%B0%D1%81%D1%81%D0%BE%D0%BD%D0%B0) з параметром λ h , {\displaystyle \lambda h,} , тобто P [ ( N t + h − N t ) = k ] = e − λ h ( λ h ) k k ! k = 0 , 1 , … , {\displaystyle \mathbb {P} [(N\_{t+h}-N\_{t})=k]={\frac {e^{-\lambda h}(\lambda h)^{k}}{k!}}\qquad k=0,1,\ldots ,} 
4. Кожна окрема реалізація процесу N t ( ω ) {\displaystyle N\_{t}(\omega )}  є [неперервною справа і має скінченні ліві границі](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B5%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B5%D1%80%D0%B2%D0%BD%D0%B0_%D1%81%D0%BF%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%B0_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D1%96%D1%8F_%D0%B7_%D0%BB%D1%96%D0%B2%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BE%D0%BD%D0%BD%D1%96%D0%BC%D0%B8_%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D1%86%D1%8F%D0%BC%D0%B8).

Властивості Пуассонівського процесу:

1. N t {\displaystyle N\_{t}} має розподіл Пуассона з параметром λ t {\displaystyle \lambda t} .
2. Для Пуассонівського процесу виконується умова однорідності по часу, тобто розподіл випадкової величини N ( t + h ) − N ( t ) {\displaystyle N(t+h)-N(t)}  залежить лише від величини інтервалу *h* і не залежить від початкового часу *t*.
3. P ( N t + h − N t = 1 ) = λ h + o ( h ) {\displaystyle \mathbb {P} (N\_{t+h}-N\_{t}=1)=\lambda h+o(h)} коли h → 0 + {\displaystyle h\to 0+} 
4. P ( N t + h − N t > 1 ) = o ( h ) {\displaystyle \mathbb {P} (N\_{t+h}-N\_{t}>1)=o(h)}  коли h → 0 + , {\displaystyle h\to 0+,} , тобто імовірність більш ніж одного приросту значення процесу на малому інтервалі є величиною меншого порядку, ніж ймовірність одного приросту.
5. Властивості (2) - (4) разом з властивістю незалежності приростів повністю характеризують Пуассонівський процес і можуть бути використанні як його альтернативне визначення.

Позначимо T 1 , … , T n , … {\displaystyle T\_{1},\dots ,T\_{n},\dots } — моменти стрибків Пуассонівського процесу. Визначмо S k = T k − T k − 1 ( k ∈ N ∗ ) . {\displaystyle S\_{k}=T\_{k}-T\_{k-1}\,(k\in \mathbb {N} ^{\*}).} . Тоді випадкові величини S k {\displaystyle S\_{k}} є незалежними і мають [експоненціальний розподіл](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%95%D0%BA%D1%81%D0%BF%D0%BE%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D1%86%D1%96%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B8%D0%B9_%D1%80%D0%BE%D0%B7%D0%BF%D0%BE%D0%B4%D1%96%D0%BB): P ( S k ≤ t ) = 1 − e − λ t . {\displaystyle {\mathbb {P} }(S\_{k}\leq t)=1-{\mathrm {e} }^{-\lambda t}.} . Самі ж випадкові змінні T n {\displaystyle T\_{n}} мають [гамма-розподіл](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B0%D0%BC%D0%BC%D0%B0-%D1%80%D0%BE%D0%B7%D0%BF%D0%BE%D0%B4%D1%96%D0%BB) Γ ( n , 1 λ ) , {\displaystyle \Gamma \left(n,{\frac {1}{\lambda }}\right),} , який для таких параметрів називають ще [розподілом Ерланга](https://uk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A0%D0%BE%D0%B7%D0%BF%D0%BE%D0%B4%D1%96%D0%BB_%D0%95%D1%80%D0%BB%D0%B0%D0%BD%D0%B3%D0%B0&action=edit&redlink=1).

При моделюванні Пуассонівського процесу – моделюється час стрибків процесу. Оскільки розподіл часу між стрибками  має експоненціальний закон розподілу, то випадкова величина моделюється за формулою

,

де - рівномірно розподілена на *[0,1]* випадкова величина,

 - інтенсивність Пуассонівського процесу.

На рис.1-2. показані реалізації Пуассонівського процесу.

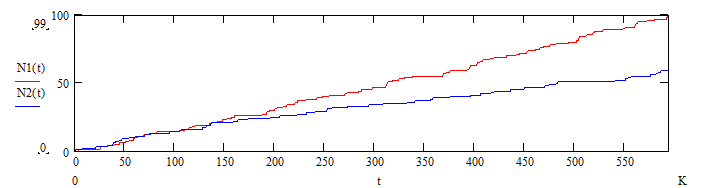


Рис. 1. Реалізації Пуассонівського процесу.

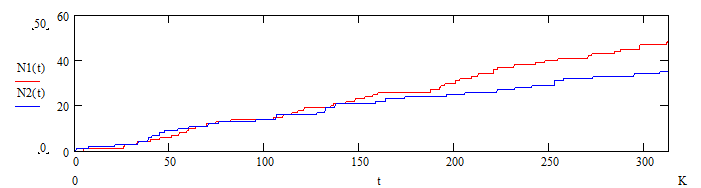


Рис. 2. Реалізації Пуассонівського процесу.

В таблиці 1 наведено реалізації першої та другої подій для Пуассонівського процесу для .

Таблиця 1.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | lambda= | 2.5 |
|  | 1 -подія | 2-подія |
| 1 | 0.733035 |  |
| 2 | 0.690852 | 1.423887 |
| 3 | 0.321992 |  |
| 4 | 0.997392 | 1.319384 |
| 5 | 0.841976 |  |
| 6 | 0.637196 | 1.479172 |
| 7 | 0.97314 |  |
| 8 | 0.957555 | 1.930695 |
| 9 | 0.686453 |  |
| 10 | 0.304566 | 0.991019 |

*Завдання 2.*

1. Змоделювати неперервний вінерівський випадковий процес.
2. За реалізаціями (кількість реалізацій > 100) оцінити середнє значення та дисперсію.
3. Знайти емпіричний закон розподілу ймовірностей часу першого виходу вінерівського процесу за заданий рівень.

**Методичні рекомендації до виконання.**

Будемо розглядати вінерівський процес на відрізку  і використовувати представлення:

за власними функціями кореляційного оператора броунівського мосту

,

де  - незалежні стандартні гауссові випадкові величини,

- власні числа кореляційного оператора

розклад у ряд Фур’є на 



де  - незалежні стандартні гауссові випадкові величини.

Реалізацію вінерівського випадкового процесу будуємо за формулами

1. 

де  - незалежні стандартні гауссові випадкові величини,

1. ,

де  - незалежні стандартні гауссові випадкові величини.

Кількість доданків *M* визначається для заданої точності  та надійності  із теореми 1-2.

**Теорема 1**. Модель  наближає процес  з надійністю  та точністю  в нормі простору , якщо для  виконуються нерівності

 та .

**Теорема 2**. Модель  наближає процес  з надійністю  та точністю  в нормі простору , якщо для  виконуються нерівності

 та ,

де .

**Рекомендована література**

**Базова література**

1. Козаченко Ю.В. Точність і надійність моделювання випадкових процесів та полів в рівномірній метриці: монографія /Ю.В. Козаченко, А.О. Пашко. – Київ, ТОВ СІК ГРУП Україна, 2016. -216с.
2. Иванова В.М. Случайные числа и их применение / В.М. Иванова. - М.: «Финансы и статистика». - 1984.
3. Гихман И.И. Введение в теорию случайных процессов / И.И. Гихман, А.В.Скороход. - М.: Наука. - 1977.
4. Вентцель Е.С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. - М.: КНОРУС. - 2013.
5. Вентцель А.Д. Курс случайных процессов / А.Д. Вентцель.- М.: Наука. - 1996.

**Допоміжна література**

1. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей / Б.В. Гнеденко. - М.: Наука. - 1988.
2. Булинский А.В. Теория случайных процессов / А.В. Булинский, А.Н.Ширяев. - М.: ФИЗМАТЛИТ. - 2005.
3. Прохоров Ю.В. Теория вероятностей: Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы / Ю.В.Прохоров, Ю.А.Розанов. - М.: Наука. - 1987.
4. Розанов Ю.А. Введение в теорию случайных процессов / Ю.А.Розанов. - М.: Наука. - 1982.
5. Тутубалин В.Н. Теория вероятностей и случайных процессов / В.Н. Тутубалин. - М.: изд-во МГУ. - 1992.
6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей, т. 1,2 / В. Феллер. - М. Мир. - 1984.
7. Koralov L.B. Theory of Probability and Random Processes / L.B. Koralov, Y.G. Sinai. – Springer. - 2007.